合流型超幾何関数とWild ramification

寺杣, 友秀

代数幾何学シンポジウム記録
1992年度 pp.126-140

合流型超幾何関数とWild ramification

寺杣 友秀　　都立大学・理学部

1. 動機

有限体上の多様体上の指標和と、複素数体上の多様体上の有理関数の複素巾の積分、すなわち、多様体上の超幾何関数の類似について考える。その一番原始的な類似は下の様な Γ-関数とGauß和である。

(1a) $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ に対して、

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

(2a) $\mathbb{F}_q$を有限体、χを$\mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$なるnontrivialなmultiplicative character, ψを$\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^\times$なるnontrivialなadditive characterとした時、$g(\chi, \psi)$は、

$$g(\chi, \psi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi(x)\psi(x)$$

で与えられる。

しかしこの2つは、有限体上の代数多様体上のtameに分岐しているsheafのl-進cohomology上のFrobeniusの固有値や$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$上のregular-singularityをもつ微分方程式の解の積分として表わされているわけではない。有限体上の多様体上のtameに分岐しているsheafのl進cohomologyのFrobeniusの

固有値として、あるいは、regular singularity をもつ微分方程式で、対応用を見つけるならば、むしろ次のBeta関数とJacobi和の類似の方が直接的に、幾何的に対応していると考えた方が自然である。

(1 a) (Beta関数) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ に対して、

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

(2 a) (Jacobi和). χ_1, χ_2 を $\mathbb{F}_q^\times$ の multiplicative character $\mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ で、$\chi_1 \neq 1$, $\chi_2 \neq 1$, $\chi_1\chi_2 \neq 1$ とすると、

$$J(\chi_1, \chi_2) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi_1(x)\chi_2(1-x)$$

$$= \frac{g(\chi_1, \psi)\, g(\chi_2, \psi)}{g(\chi_1\chi_2, \psi)}$$

後者は、multiplicativeな指標に関する有限体上の多様体の指標和、前者は、一般の多様体上の超幾何関数に一般化される。

(1 c) X を $\mathbb{C}$ 上の n 次元多様体、$\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i=1, \cdots, m)$, f_i $(i=1, \cdots, m)$ を X 上の rational function X° を $f_i \in \mathbb{C}^\times$ なる X の open set として、δ を $\prod f_i^{\alpha_i}$ で定義される twisted cycle, ω を n-form とする。

$$\int_\delta \prod_i f_i^{\alpha_i}\,\omega$$

を超幾何積分という。これを f_i の係数を parameter と見た時、これは、parameterに関する確定特異点をもつ微分方程式の解

となっており、その rank は、twisted homology の次元に等しい。twisted cycle δ をとりかえることにより、独立な解を得るが、この Wronskian を、α_i と f_i の係数の関数と見ると、

$$\Gamma(\alpha)\cdot\left(\det(\mathcal{M}),\ c_n\left(X \bmod (X-X^\circ)\right)\right)$$

の形に書かれることが、Anderson, Loeser-Sabbah, T. Saito－T.－ により知られている。（城崎シンポジウムの時は、予想だったところも、最近ほぼ完全にできた。）ここで、$\Gamma(\alpha)$ は、$\Gamma(u_i)$,（$u_i \in \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q}\alpha_i$）の形の積で、$\Gamma(u_i)$ の weight を 1，$(2\pi i)$ の weight を 2 と形式的に見ると、その weight は、$b\cdot\dim X$ となっている。

(2c) X を有限体上の多様体、$\chi_1,\cdots,\chi_m$ を multiplicative character，$f_1,\cdots,f_m$ を X 上の rational function とすると、

$$\mathrm{tr}\left(Fr^m \mid H_c^*(X^\circ, f_1^*\mathcal{L}_{\chi_1}\otimes\cdots\otimes f_m^*\mathcal{L}_{\chi_m})\right)$$
$$=\sum_{x\in X(\mathbb{F}_{q^m})} \chi_1(Nm(f_1(x)))\cdots\chi_m(Nm(f_m(x)))$$

となる。ここで、$\mathcal{L}_{\chi_i}$ は $\mathbb{G}_m$ 上の χ_i に対する rank 1 の étale sheaf　Nm は $\mathbb{F}_{q^m}$ から $\mathbb{F}_q$ へのNorm。この時 Frobenius の determinant は、

$$\det\left(-Fr \mid H_c^*(X^\circ, f_1^*\mathcal{L}_{\chi_1}\otimes\cdots\otimes f_m^*\mathcal{L}_{\chi_m})\right)$$
$$= G(\chi_1,\cdots,\chi_m, X, D)\cdot\left(\det(f_1^*\mathcal{L}_{\chi_1}\otimes\cdots\otimes f_m^*\mathcal{L}_{\chi_m}), c_n\right)$$

という形に書ける。ここで $G(\chi_1,\cdots,\chi_m, X; D)$ は、Gauß

和の積で、第二項目は、étale sheafを top chern classで evaluateしたものである。(T. Saito)

上の(1c),(2C)は、l進表現へのFrobeniusのdeterminant、あるいは、"log"で定まる多様体のperiodのdeterminantとして、解釈でき、ある程度直接的な対応であると思うことができる。しかしこの対応では、初めにあげたΓ-関数とGauß和の対応は、説明されない。また、Γ-関数あるいはその特殊値をweight 1の関数(数)、$(2\pi i)$をweight 2の数と思う事が妥当であると思われる。(1c)で出て来るΓ関数の積は、次の様な制約がある。(単にweighを定義するのみならば、この制約はいらない。)すなわち、$\Gamma(\alpha)$を$\pi\Gamma(u_i)/\prod_j\Gamma(v_j)$と表わした時、$\sum_i u_i-\sum_j v_j\in\mathbb{Z}$となる。この制限にあてはまらない例を得ようとするならば、

(i) 不確定特異点をもつ微分方程式の解の積分

(ii) wildなramificationをもつl-進sheafのcohomology

について考えなければならない。

ここでは特殊な形ではあるが、$\mathbb{P}^1$上で合流型超幾何関数のdeterminantと、Kloosterman型の(wildなramificationをもつ)l-進表現のdeterminantの間に、やはり類似の公式が存在することを見てみよう。これらは、同じgeometric originをもつものから得られるわけではなく、一方はirregular singularity

という$\mathbb{C}$上に特有の超越的なものから，他方は，標数p特有のwildなramificationから得られる。

(1d)（合流型超幾何関数）　$f(x)\in\mathbb{C}[x]$として，

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\prod_{k=1}^{m}(x-\lambda_k)^{s_k-1}e^{f(x)}dx$$

なる積分を考えると，被積分関数の$x=\infty$でのirregularityは，$d=\deg f(x)$．

(2d)（Kloosterman sum）　$\chi_1,\cdots,\chi_m$を$\mathbb{F}_q$のmultiplicative character，Φを$\mathbb{F}_q$のadditive character，$F(x)\in\mathbb{F}_q[x]$として，

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_q}\prod_{i=1}^{m}\chi_i(x-\lambda_i)\quad\Phi(F(x)).$$

ここで，$\prod_{i=1}^{m}\chi_i(x-\lambda_i)\Phi(F(x))$の定める$\mathbb{P}^1$上のétale sheafは，$x=\infty$でSwan conductor $=\deg(F(x))$をもつ。

以下のSectionで，(1d)型のHodge version，(2d)型のl-adic versionを考察する。

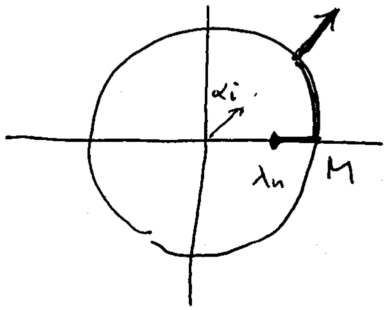
2．合流型超幾何級数

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$を$\lambda_1<\cdots<\lambda_n$を満たす実数とする。$s_1,\cdots,s_n\in\mathbb{R}$で，$s_i>0$とする。今，$x\in[\lambda_i,\infty)$の時，$(x-\lambda_i)^{s_i-1}\in\mathbb{R}$なるbranchを，$x\in(-\infty,\lambda_i]$の時，$(x-\lambda_i)^{s_i-1}\in\mathbb{R}\cdot\exp((s_i-1)\pi i)$なるbranchとする。$F(x)\in\mathbb{C}[x]$をdegree dの多項式とする。上の様なbranchを選ぶことにより，

$$\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{s_k-1}\exp\bigl(F(x)\bigr)\,x^{i-1}\,dx \quad \text{—— (1)}$$

がdefineされる。被積分のdifferential formをω_iと書く。

さらに、∞へ向かうpathを定義したいが、独立なものはd個($d=\deg F(x)$)あると考える。まず、$\lambda_n < M$なるMをfix.して、さらに、$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} f(x\alpha_i) \to -\infty$ なる方向α_i ($\alpha_i\in\mathbb{C}$, $|\alpha_i|=1$)がd個定まる。$\log\alpha_i$を$0\leq \mathrm{Im}\log\alpha_i<2\pi$としてfixする。$[\lambda_n, M]$から、$Me^{i\theta}$ ($0\leq\theta\leq \mathrm{Im}\log\alpha_i$), $x\alpha_i$ ($M\leq x$ ∞) へと接続して、$\infty\alpha_i$へと致るpathとして$[\lambda_n,\infty\alpha_i]$を定義する。(下図)



このpathに沿ってω_iを解析接続して、

$$\int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j}\omega_i = \int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j}\prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{s_k-1}\exp\bigl(F(x)\bigr)\,x^{i-1}\,dx \quad \text{—— (2)}$$

を定義する。(1)(2)の形の積分を合流型超幾何関数という。

ここで、$\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\omega_i$ ($j=1,\cdots,n-1$, $i=1,\cdots,n+d-1$), $\int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j}\omega_i$ ($j=1,\cdots,d$, $i=1,\cdots,n+d-1$)なる$(n+d-1)\times(n+d-1)$個の合流型超幾何関数ができるので、それらをelementとする行列の行列式を考える。

<u>Def</u> (Determinant of confluent hypergeometric functions)

$$D = \det\left(\left(\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \omega_i\right)_{\substack{i=1,\cdots,n+d-1\\ j=1,\cdots,n-1}},\ \left(\int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j} \omega_i\right)_{\substack{i=1,\cdots,n+d-1\\ j=1,\cdots,d-1}}\right)$$

この determinant は次の定理で与えられる。

<u>Theorem 1</u>

$$D = (2\pi)^{\frac{d-1}{2}}\ \Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_n)\ (d a_d)^{-s-\frac{d-1}{2}} (-1)^{ds+\frac{d(d-1)}{4}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)^{s_j-1}\right)\ \prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$$\times \prod_{i=1}^{n}\exp(F(\lambda_i))\ \prod_{F'(u)=0}\exp(F(u))$$

ここで $s = s_1+\cdots+s_n$

この公式を見てもわかる様に、Dは、Γ-factor, π の巾、$F'(x)$ の最高次の係数の巾、λ_i の discriminant (= critical value), exponential 型の critical value, exponential 型の discriminant の積の形をしている。

<u>proof</u> $\exp(F(x)) = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{F(x)}{m}\right)^m$ を使うことと、$\infty\alpha_i$ の方も $1+\frac{F(x)}{m}=0$ の解で近似していく。$\alpha_1(m),\cdots,\alpha_d(m)$ を $1+\frac{F(x)}{m}=0$ の解で m に関する代数関数と思う。$m\to+\infty$ の時、$\alpha_i(m)/|\alpha_i(m)| \longrightarrow \alpha_i$ となる様に $\alpha_i(m)$ の branch を選ぶ。こうすると、合流させて、

$$\int_{\lambda_n}^{\infty\alpha_j}\omega_i = \lim_{m\to\infty}\int_{\lambda_n}^{\alpha_j(m)} \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{s_k-1}\left(1+\frac{F(x)}{m}\right)^m x^{i-1}dx$$

となる。この様にして(合流型でない)超幾何関数のdeterminantの計算に帰着される。例えばこの方法は、Γ-関数の無限積表示 = Euler の limit formula $\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty}\int_0^m x^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m dx = \lim_{m\to\infty} m^z \left(z \prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right)^{-1}$ を得るのにも用いられた。

(この公式は determinant の limit の計算にも用いられる。)

<u>Lemma</u> 今までの branch のとり方で、$\omega_i' = \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{s_k-1} x^{i-1} dx$ とする。

$$\det\left(\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} \omega_i\right)_{i,j=1,\cdots,n-1} = \frac{\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_n)}{\Gamma(s_1+\cdots+s_n)} \prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i) \times \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)^{s_j-1}\right)$$

この定理を、$\prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{s_k-1}\left(1+\frac{F(x)}{m}\right)^m = \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)^{s_k-1} \times \left(\frac{a_d}{m}\right)^m \prod_{j=1}^{d}(x-\alpha_j(m))^m$ に対して適用する。D を計算するには、次の limit を計算すればよい。$s = s_1+\cdots+s_n$ として、

① $$\lim_{m\to\infty} \frac{\Gamma(s)\ \Gamma(m+1)^d}{\Gamma(s+d(m+1))} m^{s+\frac{d-1}{2}} d^{md} = d^{-d-s+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(s)$$

② $$\lim_{m\to\infty} m^{-\frac{d-1}{2}} \prod_{i<j}(\alpha_j(m)-\alpha_i(m)) = d^{\frac{d}{2}} a_d^{-\frac{d-1}{2}} (-1)^{\frac{d(d-1)}{4}}$$

③ $$\lim_{m\to\infty} m^{-1} \prod_{j=1}^{d}(\alpha_j(m)-\lambda_i) = \frac{(-1)^d}{a_d}$$

④ $$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a_d}{m}\prod_{i=1}^{d}(\lambda_j-\alpha_i(m))^m\right) = \exp(F(\lambda_i))$$

⑤ $$\lim_{m\to\infty}\left(d^{-d}\left(\frac{a_d}{m}\right)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\alpha_j(m)-\alpha_i(m))^m\right) = \prod_{F'(u)=0}\exp(F(u))$$

ここでは、①と⑤を計算してみよう。

①は左辺を、

$$\frac{(m!)^d \left(m^{\frac{s}{d}}\, m^{\frac{s+1}{d}} \cdots m^{\frac{s+d-1}{d}}\right) \cdot d^{md}}{s(s+1)\cdots(s+d(m+1)-1)}$$

$$= m^{\frac{s}{d}} \left[\frac{s}{d} \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{s}{kd}\right)\right]^{-1} \times m^{\frac{s+1}{d}} \left[\frac{s+1}{d} \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{s+1}{kd}\right)\right]^{-1}$$
$$\cdots \times m^{\frac{s+d-1}{d}} \left[\frac{s+d-1}{d} \prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{s+d-1}{kd}\right)\right]^{-1} \times d^{-d}$$

と変形しておいて、Eulerのlimit formulaを使い、$\Gamma(\frac{s}{d}) \cdots \Gamma(\frac{s+d-1}{d})$ に対して、Gaußの積公式を使い得る。

⑤は、$1+\frac{F(x)}{m} = \frac{a_d}{m}\prod_{j=1}^{d}(x-\alpha_j(m))$ の両辺を微分して、$\alpha_j(m)$ を代入して、$F'(\alpha_j(m)) = a_d \prod_{i \neq j}(\alpha_j(m)-\alpha_i(m))$ なので、左辺のかっこの中身は、

$$\left(\frac{a_d}{m}\right)^{d-1} \prod_{j=1}^{d} \frac{F'(\alpha_j(m))}{d\, a_d} = \left(\frac{a_d}{m}\right)^{d-1} \prod_{j=1}^{d} \prod_{F'(u)=0} (\alpha_j(m)-u)$$

$$= \left(\frac{a_d}{m}\right)^{d-1} \prod_{F'(u)=0} \frac{m}{a_d}\left(1+\frac{F(u)}{m}\right)$$

$$= \prod_{F'(u)=0}\left(1+\frac{F(u)}{m}\right)$$

で、辺々 m 乗して、$\lim_{m\to\infty}$ をとり、⑤を得る。

3. <u>Wild ramificationをもつsheafのcohomology.</u>

この章では、上のconfluent hypergeometric functionの l-進analogyについて考察しよう。

Cを有限体上のproper smooth なcurve，C°をCのopen set として、$\mathcal{F}$をその上のrank 1のℓ-進étale sheafとすると、$\mathcal{F}$を係数とするzeta関数は、

$$Z(C,\mathcal{F},t)=\prod_{i=0}^{2}\det\left(1-t\,Fr\,\middle|\,H^i_c(C^\circ\otimes\overline{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F})\right)^{(-1)^{i+1}}$$

で与えられる。この時、$Z(C,\mathcal{F},t)$は、次の様な関数等式をもつことがTateにより示された。

$$Z(C,\mathcal{F},t)=q^{1-g}\,t^{(2g-2)}\prod_v\varepsilon_v(\chi_v,\omega_v)\,Z(C,\mathcal{F}^*,q\,t^{-1})$$

ここでω_vはglobal differential form ωのvでのgerm，$\varepsilon_v(\chi_v,\omega_v)$は、local ε-factorと呼ばれるもので、後に定義をのべる。上の公式は、いいかえれば、

$$\det\left(-Fr\,\middle|\,H^1_c(C^\circ\otimes\overline{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F})\right)=q^{1-g}\prod_v\varepsilon_v(\mathcal{F}_v,\omega_v)$$

とFrobeniusのdeterminantが、local factorの積に書けることを表わしている。local factor $\varepsilon_v(\chi_v,\omega_v)$は局所類体論を用いて定義される。$v$を$C$の点とする時、$v$における$C$の関数体のcompletionを$K_v$とする。$\mathcal{F}$は$C^\circ$上のétale sheafなので、$K_v$のabel化Galois群 $Gal(K_v^{ab}/K_v)$のcharacterを定めるが、これは、局所類体論を通じて、$K_v^\times$のcharacterを定める。これをχ_vと書く。χ_vが不岐しているとすると、χ_vのconductor cが $\chi_v(1+\pi_v^c\mathcal{O}_v)=1$となる最小の$c$として定義される。$\omega_v$を、$K_v$のdifferential とする時，$\gamma_v=\pi_v^c\dfrac{\omega_v}{d\pi_v}$によって定義する。また、$\mathbb{F}_q$のadditive character $\psi:\mathbb{F}_q\longrightarrow\mathbb{C}^\times$

をfixする。ω_v を K_v の differential とすると、これは、K_v の additive character $\phi(*, \omega_v)$ を定める:

$$\phi(z, \omega_v) = \phi\left(\mathrm{Tr}_{\kappa(v)/\mathbb{F}_q}\left(\mathrm{Res}_v(z\omega_v)\right)\right) \quad (z \in K_v).$$

もともと上の関数等式が C の adele 上の Fourier 変換、Poisson の和公式から得られていたことに立ちかえってみれば、local ε-factor は、次の様な積分で得られていたことがわかる。

<u>Prop</u> χ_v を ramify する $K_v^\times$ の character とする。この時、

$$\varepsilon_v(\chi_v, \omega_v) = \int_{\gamma_v^{-1} \mathcal{O}_v^\times} \chi_v^{-1}(z)\, \phi(z, \omega_v)\, d\mu(z)$$

で、$\mathcal{O}_v$ の Haar measure $d\mu$ は $d\mu(\mathcal{O}_v) = 1$ で normalize されているものとする。

Frobenius の Determinant を計算するための道具がそろったので、次に具体的な $\mathbb{P}^1$ 上の sheaf を定義しよう。欲しい sheaf $\mathcal{F}$ は、次の性質をもつものである。

$$\mathrm{tr}\left(Fr^m \mid H_c^1(C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F})\right) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^m}} \prod_{i=1}^{n} \chi_i\left(N_m(x - \lambda_i)\right) \phi\left(\mathrm{Tr}(F(x))\right)$$

ここで、χ_i $(i = 1, \cdots, n)$ は $\mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$ なる non-trivial character、$\lambda_i \in \mathbb{F}_q$、$\phi$ は nontrivial な additive character、$F(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ である。この sheaf $\mathcal{F}$ を、adele の character $\chi : \mathbb{A}_K^\times / K^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ として、また、$\mathbb{P}^1$ の open set 上の etale sheaf として構成してみよう。

(A) Adele の character として.

(1) Tame symbol　今. $\mathbb{P}^1$ の function field を $\mathbb{F}_q(x)$ として.
$u \in \mathbb{P}^1$ に対して $K_u^\times \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ を $K_u^\times \ni y \longmapsto \chi_i\left((x-\lambda_i, y)_u\right) \in \mathbb{Q}_\ell^\times$
で定義する。ここで, $(x-\lambda_i, y)_u$ は Tame symbol :

$$(x, y)_u = \underset{k(u)/\mathbb{F}_q}{\mathrm{Nm}}\left((-1)^{\mathrm{ord}_u x\, \mathrm{ord}_u y} \frac{x^{\mathrm{ord}_u y}}{y^{\mathrm{ord}_u x}} \pmod{\pi_u} \right)$$

これは. reciprocity law により $K^\times$ で消える $\mathbb{A}^\times$ の character χ_i^* を定める。

(2) Artin-Schreier character　$F(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ とする。$\Phi_{F,u}$: $K_u^\times \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ を, $\Phi_{F,u}(y) = \Phi\left(\mathrm{Tr}_{k(u)/\mathbb{F}_q}\left(\mathrm{Res}_u\left(F(x) \cdot \frac{dy}{y}\right)\right)\right)$
で定義する。これは. residue theorem により. 同じく $K^\times$ で消える $\mathbb{A}_K^\times$ の character Φ_F を定める。

(1)(2) を使って, χ を.

$$\chi = \chi_1^* \cdots \chi_n^* \; \Phi_F$$

で定める。

(B) étale sheaf として

(1) $\mathbb{P}^1$ 上の $(x-\lambda_i)^{\frac{1}{q-1}}$ で定義される cyclic cover f_i : $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を考えて. $((f_i)_* \mathbb{Q}_\ell)(\chi_i)$ で定義される sheaf を. $\mathcal{F}_i^*$ とかく。

(2) $\mathbb{A}^1$ 上の Lang sheaf $\mathcal{L}_\Phi$ を. $(\wp_* \mathbb{Q}_\ell)(\Phi)$ で定義する。
ここで. $\wp$ は. $\mathbb{A}^1 \ni x \longmapsto \wp(x) = x^q - x \in \mathbb{A}^1$ で定義される $\mathbb{F}_q$-

étale-covering である。今 $F(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ は $\mathbb{A}^1 \ni x \longmapsto F(x) \in \mathbb{A}^1$ なる morphism を定めるが、$\mathcal{L}_{F,\phi}$ を $F^*\mathcal{L}_\phi$ を 0 で $\mathbb{P}^1$ に延長する。

(1) (2) を使って、$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^* \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n^* \otimes \mathcal{L}_{F,\phi}$ で定める。

上の(A), (B)の構成法の $\mathcal{F}$ と χ は類体論を通じて対応している。

ここでこの sheaf $\mathcal{F}$ あるいは character χ の local ε-factor を計算してみよう。

local ε-factor の計算

(1) Tame place ($v \leftrightarrow x = \lambda_i$)

$$\varepsilon_v(\chi_v, dx) = \int_{\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v^\times} \chi_v(z)^{-1}\phi(z, dx)\, d\mu(z)$$

$$= q \int_{\mathcal{O}_v^\times} \chi_v\left((x-\lambda_i)^{-1}z\right)^{-1} \phi\left((x-\lambda_i)^{-1}z, dx\right) d\mu(z)$$

$$= \chi_v(x-\lambda_i) \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_v(z)^{-1}\phi(z)$$

$$= \chi_i(-1) \prod_{j \neq i} \chi_j(\lambda_i - \lambda_j)\ \phi(F(\lambda_i)) \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_i(z)^{-1}\phi(z)$$

(2) Wild place ($v = \infty$)

上の積分を和の形に書きなおせば、

$$\varepsilon_\infty\left(\chi_\infty, -\frac{d\xi}{\xi^2}\right) = \frac{1}{q^2} \sum_{z = l_0(1 + l_1\xi + \cdots + l_d\xi)} \prod_{i=1}^{n} \chi_i(b_0)^{-1} \times \phi\left(-\mathrm{Res}\left(z\xi^{-d-1}d\xi\right)\right)$$

$$\times\, \phi\left[\mathrm{Res}\left(a_d\xi^{-d} + \cdots + a_1\xi^{-1} + a_0\right)\left((1-d)\frac{d\xi}{\xi} + \frac{dz}{z}\right)\right]$$

和の中の第三項目は、ϕの中が $a_0 \sim a_d$, $h_0 \sim h_d$ の polynomial になるが、これを h_0 を fix して、$h_1 \sim h_d$ に関して加えて、消えないためには、$h_0 = d a_d$ でなくてはならないことがわかり、$\pi \chi_i(b_0)^{-1}$ の項は、$h_0 = d a_d$ となって、和の外に出る。結果、上式 $= \prod_{i=1}^{n} \chi_i(d a_d)^{-1} \varepsilon_\infty(\varphi_{F,\infty}, -\frac{d\xi}{\xi^2})$ と等しくなる。

$\varepsilon_\infty(\varphi_{F,\infty}, -\frac{d\xi}{\xi^2})$ については、$F : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ についての、$\mathcal{L}_{F,\phi}$ の higher direct image sheaf $F_* \mathcal{L}_{F,\phi}$ を projection formula を使って、$F_* \mathbb{Q}_\ell \otimes \mathcal{L}_\phi$ と書きかえる。rank=1 でない時も ε-factor $\varepsilon_v(F_* \mathcal{L}_{F,\phi}, dx)$ が定義されているが、これに関する性質を使う。$\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v) \longrightarrow GL(d, \mathbb{Q}_\ell)$ に対する ε-factor は、Laumon によって定義されている。今、$\mathcal{L}_{F,\phi}$ は $x \in \mathbb{A}^1$ では etale なので、

$$\varepsilon_\infty(\mathcal{L}_{F,\phi}, dx) = \prod_{v \in \mathbb{P}^1} \varepsilon_v(\mathcal{L}_{F,\phi}, dx)$$

また、Global な $\mathbb{P}^1$ 上の積公式により、local factor の積は rational differential のとり方によらないので、

$$\text{上式} = \prod_{v \in \mathbb{P}^1} \varepsilon_v(\mathcal{L}_{F,\phi}, f^* dt) = q^{d-1} \prod_{F(u)=0} \phi(F(u))\, \varepsilon_\infty(\mathcal{L}_{F,\phi}, f^* t)$$

induction に関する ε-factor の公式と、projection formula を使えば、上式の右辺の第3項目は、

$$\varepsilon_\infty(F_* \mathcal{L}_{F,\phi}, dt)\, \varepsilon_\infty(\mathbb{Q}_\ell, F^* dt)\, \varepsilon_\infty(F_* \mathbb{Q}_\ell, dt)^{-1}$$

$$= \varepsilon_\infty(F_* \mathbb{Q}_\ell \otimes \mathcal{L}_\phi, dt)\, \varepsilon_\infty(\mathbb{Q}_\ell, F^* dt)\, \varepsilon_\infty(F_* \mathbb{Q}_\ell, dt)^{-1}$$

第一項目以外は容易だが、第一項目は、1次指標の和に分解

されるので、それを使って計算する。結局 $u=\infty$ での ε-factor は、

$$\varepsilon_\infty(\chi_\infty dx) = q^{\frac{d-3}{2}} \prod_{i=1}^{d} \chi_i(da_d)^{-1} \prod_{F'(u)=0} \phi(F(u))\ c(d)^{-1} \left(\frac{a_d}{\mathbb{F}_q}\right)$$

と書かれる。ここで、$c(d)$ は d のみによる $\{\pm1, \pm i\}$ の元で、$\left(\frac{a_d}{\mathbb{F}_q}\right)$ は a_d の平方剰余である。

これですべての ε-factor が計算された。この ε-factor を使って、Frobenius の determinant に関する下の公式を得る。

<u>Theorem 2</u> (Determinant of Frobenius on confluent hypergeometric sheaf)

$$\det\left(-Fr \mid H^1_c(\mathbb{P}^1\otimes\overline{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F})\right)$$
$$= q^{\frac{d-1}{2}} \prod_{i=1}^{n} g(\chi_i, \phi)\, c(d)^{-1} \left(\frac{a_d}{\mathbb{F}_q}\right)^{d-1} \prod_{i=1}^{n} \chi_i(-da_d)^{-1} \prod_{i=1}^{n} \chi_i\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)\right)$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \phi(F(\lambda_i)) \prod_{F'(u)=0} \phi(F(u))$$

<u>Remark</u> Theorem 1 と Theorem 2 は次の term が対応している。

	Tate motif	Gamma function	critical value
Hodge	$2\pi i$	$\Gamma(s_i)$	$\prod_{i\neq j}(\lambda_j-\lambda_i)^{s_i-1}$
l-adic	q	$g(\chi_i, \phi)$	$\chi.\ \prod_{i\neq j}\chi_i(\lambda_j-\lambda_i)$

	exp. critical value	exponential discriminant
Hodge	$\exp(F(\lambda_i))$	$\prod_{F'(u)=0} \exp(F(u))$
l-adic	$\phi(F(\lambda_i))$	$\prod_{F'(u)=0} \phi(F(u))$